УРОК 5

Тема уроку: Підсумковий урок за темою «Координати та вектори в просторі»

Підручник з математики для 10 класу § 6

Сьогодні ви повинні повторити, систематизувати та узагальнити знання про координати та вектори в просторі, обов'язково вивчити теоретичний матеріал, використовувати означення та властивості при розв'язуванні задач.

Перевірка домашнього завдання

№42.4 *Відповідь:* -1

№42.6 *Відповідь:* 1) 16; 2) -10

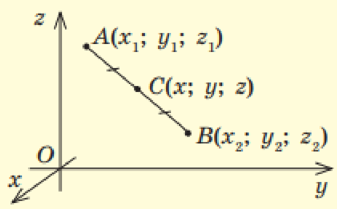
№42.8 *Відповідь:* -3

№42.15 *Відповідь:* -1 або 2

Треба знати

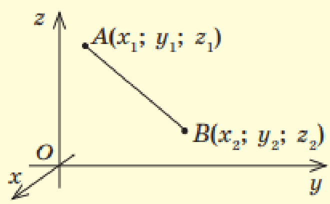
ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ В ПРОСТОРІ

Координати середини відрізка



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Відстань між точками



$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ВЕКТОРИ

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який із його кінців є початком, а який — кінцем.

Координатами вектора з початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ і $a_3 = z_2 - z_1$: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$

Довжина (модуль) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

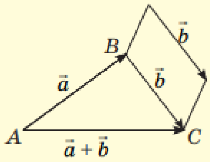
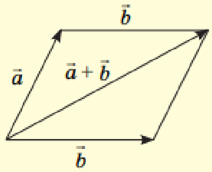
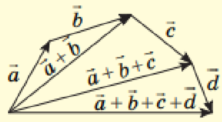
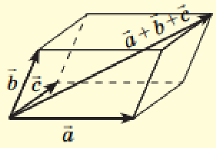
ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

Додавання векторів

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто

$$\overline{(a_1; a_2; a_3)} + \overline{(b_1; b_2; b_3)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$$

Побудова суми векторів

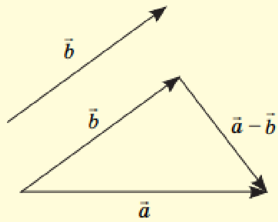
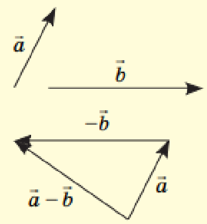
Правило трикутника	Правило паралелограма	Правило многокутника	Правило паралелепіпеда
			

Віднімання векторів

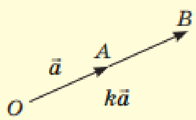
Різницею векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1;c_2;c_3)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$:

$$\overline{(a_1;a_2;a_3)}-\overline{(b_1;b_2;b_3)}=\overline{(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)}$$

Побудова різниці векторів

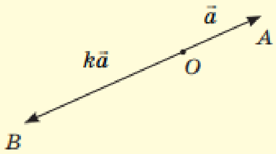
	

Множення вектора на число



$k>0$

Вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений із вектором $\vec{a}$



$k<0$

Вектор $k\vec{a}$ протилежно напрямлений із вектором $\vec{a}$

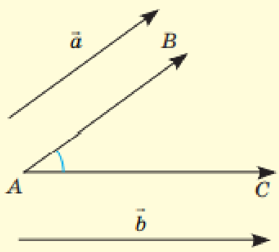
Добутком вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ **на число** k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) називається вектор $\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$, який позначають $k\vec{a}$ або $\vec{a}k$:

$$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|.$$

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори, то існує число k таке, що $\vec{b}=k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b}=k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні

Скалярний добуток векторів



$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle BAC$$

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Зазвичай скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають ***скалярним квадратом*** вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Кут між векторами:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Властивість і ознака перпендикулярних векторів: якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$

Розв'язування задач

Задача 1. Знайти: 1) координати точки K, яка є проекцією точки $A(9;\ 5;\ 8)$ на площину xy;
2) відстань від точки $A(9;\ 5;\ 8)$ до площини xy.

Розв'язання. 1) Проекцією точки $A(9;\ 5;\ 8)$ на площину xy є точка $K(9;\ 5;\ 0)$ (мал. 11.3).
2) Відстань від точки $A(9;\ 5;\ 8)$ до площини xy дорівнює 8.
Відповідь. 1) $K(9;\ 5;\ 0)$; 2) 8.

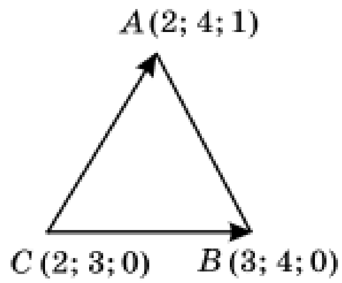
Задача 2. Дано точки $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(3;\ -3;\ 7)$, $C(-4;\ 1;\ 0)$, $D(x;\ y;\ z)$. Знайти x, y і z, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}(3 - 2;\ -3 - (-3);\ 7 - 4)$, тобто $\overrightarrow{AB}(1;\ 0;\ 3)$;
$\overrightarrow{CD}(x - (-4);\ y - 1;\ z - 0)$, тобто $\overrightarrow{CD}(x + 4;\ y - 1;\ z)$.
Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $x + 4 = 1$; $y - 1 = 0$; $z = 3$.
Отже, $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.
Відповідь. $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.

Задача 3. Спростити вираз: $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c})$.

Розв'язання. $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c}) = 4\vec{a} - 4\vec{b} + 4\vec{c} - 2\vec{a} + 4\vec{b} + 15\vec{a} - 12\vec{c} = 17\vec{a} - 8\vec{c}$.
Відповідь. $17\vec{a} - 8\vec{c}$.

Задача 4. Знайти градусну міру кута C трикутника з вершинами в точках $A(2;\ 4;\ 1)$, $B(3;\ 4;\ 0)$, $C(2;\ 3;\ 0)$.



Мал. 14.5

Розв'язання. Кут C трикутника ABC (мал. 14.5) збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$. Маємо:
$\overrightarrow{CA}(2 - 2;\ 4 - 3;\ 1 - 0)$, тобто $\overrightarrow{CA}(0;\ 1;\ 1)$;
$\overrightarrow{CB}(3 - 2;\ 4 - 3;\ 0 - 0)$, тобто $\overrightarrow{CB}\ (1;\ 1;\ 0)$.
Тоді

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

звідки $\angle C = 60°$.
Відповідь. 60°.

Задача 5. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$, $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 120°$. Знайти $|3\vec{c} + 4\vec{d}|$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|3\vec{c} + 4\vec{d}| = \sqrt{(3\vec{c} + 4\vec{d})^2} = \sqrt{9\vec{c}^2 + 2 \cdot 3\vec{c} \cdot 4\vec{d} + 16\vec{d}^2} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{c}|^2 + 24|\vec{c}||\vec{d}|\cos 120° + 16|\vec{d}|^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 \cdot 2^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Відповідь. 7.

Готуємось до ЗНО

Контрольне тестування http://surl.li/crddc